数学と数学教育を考える

―畑村洋太郎『直感でわかる数学』を読んで

盛田　常夫

日本の学力低下が問題になっている。とくに理数系の低下が著しいという。日本数学会を初めとする学者の学会連合が、「文部科学省のゆとり教育は失敗」という提言を出した。先進国の中でも、日本の数学授業時間数は少ない（中学三年で全教科の一三％）という。

さて、一部の人を除き、誰もが数学で苦労した経験をもつ。数学ができる人はどんな頭の構造をしているのだろうなどと考えた人も多いだろう。本当に物わかりが悪くて数学が分からないのか、それとも数学教科書や先生の教え方が悪いのか。

畑村氏の近著は、明快に後者の立場を主張する。教え方も悪いし、教科書も学ぶ人の立場にたっていないと批判する。自らの学生時代の素朴な疑問にもとづいて、いくつかの数学理論の意味を探って、数学にたいする興味を持ち直そうという呼びかけが本書の狙いである。

いったい、サインとかコサインはどうやって考え出されたのか、常用対数は何のために発明されたか、虚数や複素数は何の役に立つ、微分や積分は何を意味している、ほとんどの微分方程式は解けない等々、著者が抱き続けてきた問題を絵や理屈で説明したものが本書の内容を構成している。

畑村氏が例示したものに限らず、すべての数学理論について、この種の疑問を呈することができる。しかし、学校の数学教師から、そのような疑問にたいする丁寧な説明を受けた記憶はない。大学の数学授業ではなおさら、そのような「初等的解説」をおこなうことはない。だが、本当にそれで数学教育は良いのだろうか。

何故分からないのか

大学の数学基礎論は集合論の公理から始まる。数学教授は公理から数学体系が構成されていくことを示していくが、学生の方は次第にその論理を追跡できなくなる。数学的思考の訓練を受けていない者が、抽象的な論理だけを追跡できるわけがないし、そもそもどうして数学の体系が集合論から始まるのか、その素朴な疑問が払拭されないまま講義が進む。数学者は皆、初めからこのような抽象論理で数学を学んできたのだろうか。そうだとすると、やっぱり頭の構造が違うのか。

しかし、どんな大数学者であっても、最初から抽象的な概念や理論に取り組んだはずがない。具体的な問題が初めにあり、それを分析する結果として様々な公理を発見し、そこから数学理論が形成されてきたはずだ。ところが、数学者はもちろん、教科書や教師も、それぞれが格闘してきたプロセスを抜きに、あたかも数学理論が公理から何の矛盾もなく創られたかのように、抽象的概念（公理）を演繹的に教え込もうとする。ここからすべての問題が発生する。

研究と教育の違い

このような数学教育では、「人は抽象的概念から出発して理解することができない」と

いう当たり前のことが無視されている。人は具体的なイメージや経験があって、それと照らし合わせることで抽象的な概念を理解する。それはすべての学問について言える。

　ほとんどの数学教科書は、それぞれの数学概念がどのようにして獲得されたかを説明しないで、研究結果として得られた抽象的な概念から出発して理論を説明していく。これは学者が研究する方法そのものなのだ。つまり、最も抽象的な概念から出発して理論を構成していくのは学者の仕事で、これは教育の方法ではない。教育では逆の方法、つまり具体的な事象から出発して、抽象的な概念を説明するプロセスが必要なのだ。

　抽象的概念から理論を構成するやり方は理論的方法あるいは構成的方法、具体的な現象から抽象的な概念を得るのは発見的方法あるいは教育的方法と名付けることができる。教育現場に必要なのは発見的方法なのだ。この二つの手法を区別しないで、学者が研究するのと同じ方法で教科書を構成するから、数学学習の意味が理解できない。だから、数学にたいする興味が失われる。

教育の構造的問題

　もっとも、日本では教科書検定で、教科書の内容を最大限に切り捨て、教科書を薄くすることを「ゆとり」と考えているから、文部科学省にも責任がある。発見的教育的方法で数学や理科の教科書を編集すれば、当然のことながら教科書は厚くなる。現在の検定制度が維持される限り、このような教科書が生まれる余地はない。また、このような教科書ができても、内容を咀嚼し取捨選択して教授するためには、教師にかなり高いレベルの力量が必要とされる。現在の検定制度が存在し、教師が勉強できる余裕と相応の努力がなければ、厚い教科書は使えない。

　だから、日本ではエッセンスだけを薄い教科書に詰め込み、子供が興味や関心を持てない状態にしている。数学や理科嫌いが増える原因には、学者、教師、文部科学省のそれぞれに責任があり、たんに「ゆとり教育」が問題なのではない。残念なことに、学者にはそれが分からない。たんに授業時間が少ないとか多いとかの問題ではなく、教育方法にかかわるきわめて基本的で構造的な問題なのだ。

数学は算術か

　「ゆとり教育」からの転換は、「百マス計算ドリル」の練習に直結するのだろうか。もちろん、四則演算ができなければ話にならない。それは人が言葉を覚えるのと同じこと。しかし、算術計算が得意であれば、数学が分かるわけではない。暗算が得意だから数学専攻を選ぶわけではない。数学は算術ではなく、論理なのだ。それが分からないと、数学教育を理解できない。

　現代では複雑な計算はコンピュータがやってくれる。数学が算術なら、もう人は数学を学ぶ必要がないことになる。そんなことはない。それぞれの数学手法の意味を考え、計算式を構成していくのが人間の仕事になる。そこには算術力ではなく、論理力が必要になる。論理的思考を鍛えることは、他の学問領域を学ぶ基礎にもなる。そういう視点から、数学を見ていくことが必要だ。

　だから、数学を算術計算におとしめてしまうような「ドリル練習」は、逆に数学を理解する上で大きな障害になる。計算練習は必要だが、必要以上の練習は無駄だし、意味がな

く、逆に弊害の方が大きい。それより、一つ一つの算法や数学手法の意味を教えて行く方が、後年の数学学習に役立つ。「百マス計算」をやることで、数学が分かったと考えてしまうのは、百害あって一利なし。小中学校の教師が数学教育の代わりに、市販のドリル計算で数学授業を終わらせてはならない。

現代数学の始まり

「平行線が交わる」あるいは「一点を通る平行線が何本も引ける」ことを前提にした幾何学は、非ユークリッド幾何学と呼ばれる。日常的な感覚とは違っているが、地球規模や宇宙規模には、非ユークリッド幾何学が必要になる。地球の表面に巨大な三角形を描くと、内角の和は三六〇度より大きくなる。これを測定するのが、非ユークリッド幾何学である。

身の廻りの空間を観察している限りではニュートン力学で十分だが、原子の世界や宇宙の世界を観察する時には、量子力学や相対性理論が必要になってくる。家を建てたり、物の長さを測ったりするにはユークリッド幾何学やニュートン力学で十分だが、宇宙の大きさを測るためには非ユークリッド幾何学が必要になる。この非ユークリッド幾何学は一九世紀半ばになって漸く、人類が発見したものだ。ハンガリーのボヤイ、ロシアのロバチェフスキー、そしてドイツのリーマンが、ほぼ同じ時期にこの理論に到達した。

ユークリッドの体系が構築されてほぼ一五〇〇年の時間を経て、人類は新しい幾何学を手に入れた。ニュートン力学が構築されたのは一七世紀半ばで、量子力学が構築されるのは一九二〇年代である。どうしてこの時期に、人類は新たな理論を構築できたのだろうか。こういうことを考えるだけで、近代社会と科学の発展の歴史にたいする関心が生まれるはずだ。数学・物理教育は、学ぶ者の関心をこうした科学史の世界にひきこまなければならない。

数の不思議

数学の基礎は「数（かず）」。物事を一つ二つと数えていくことから、数学が始まった。世界のあらゆるものを数に転換する、つまり数という形や、数と数との関係で世界のことを表そうとするのが数学という学問。世界や物事の中身ではなく、数や関係で表される形式を扱うのが数学なのだ。

数の基礎は、一つ二つと勘定できる数字。それを自然数という。一つずつ離れているので、離散的な数とも言われる。我々がふつうに使っている数字だ。

もう一つの数字は、連続的な数。切っても切りきれない、繋がっている数字。長さや水量は一つ二つと数えることができない。数直線の１と２の間には１・５がある。１・５と１の間には、１・１２５がある。１．１２５と１の間には、また別の数がある。こうやって、無限に数を見つけることができる。これが実数の世界。これは素粒子の世界を見るようものだ。

世の中には、一つ二つと数えられるものと、数えられないものがあるから、自然数も実数も世界の有り様と結びついている。どちらにしろ、自然数と実数は数学の基礎の基礎なのだ。だから、数学では何よりもまず、自然数の集合とか、実数の集合を考えることから始まる。これらの集合はいったいどのような特

性をもっているのか、それ確定することから現代数学が始まった。

現代数学は無限と格闘している

非ユークリッド幾何学の発見からやや遅れて、一九世紀後半にカントールの集合論が生まれた。この二つの理論によって、数学は大転換を迎えることになった。カントールによる集合論的な数学手法にもとづいて、数学理論を公理論的に再構成することが、二〇世紀数学の課題になった。現在もなお、現代数学はカントールが開発した集合論にもとづいて理論を構成し、教科書を作成している。だから、カントールに始まる現代数学の基本問題を理解しておくことは、きわめて重要なのである。

カントールの主題は何か。それは実数の集合の研究である。自然数も実数も、無限の要素をもつ集合である。有限の世界はわれわれの日常の世界。無限は宇宙の世界であり、素粒子の世界だ。無限の世界には有限の世界とは違う法則が支配している。もっとも、人類が無限の世界をどこまで理解できるのか、それ自体が根本問題だが。

有限集合では、当然のことながら全体集合は部分集合より大きい。しかし、無限集合ではこれが成り立たなくなる。ここから集合論にまつわる各種のパラドックスが出てくる

また、実数の無限性の特性から、たとえば「ゼノンの矢」のようなパラドックスが出てくる。数学者は明快に説明しないが、「ゼノンの矢」の矛盾は、時間を捨象した数学的論理的無限と、物理学的現実的無限の混同にもとづいている。こういう視点で見ると、数学の無限と物理学の無限を比較するという興味深い問題が出てくる。

同じ無限集合でも、自然数は単調に無限に発散していく集合だが、実数は隙間なく詰まった数の集合である。この二つの無限集合は同じだけの濃さ（濃度）をもっているのだろうか、それとも違う濃さをもっているのだろうか。カントールは実数の方が濃い集合だと証明した。しかし、「実数集合の濃度」は「自然数集合の濃度」の次に来る「無限の濃さ」なのかどうか、これを証明することができなかった。これが二〇世紀の数学者を格闘させた集合論の基本問題（連続体仮説）である。

二〇世紀の数学

カントールの路線にもとづいて現代数学を再構築しようとしたのがヒルベルトであり、ハンガリー人ノイマンこそヒルベルトの構想に共鳴し、現代数学の公理体系を確立しようとした数学者である。

そのヒルベルトが一九〇〇年の国際数学者会議で発表した「二〇世紀二三の問題」が、現代数学の出発点になった。二三の問題のうち、完全に解決されたものはわずかで、多くが一部解決か未解決のままになっている。二三の問題の第一問題が「連続体仮説」であり、第二問題は「算術公理の無矛盾性」である。

われわれが当然のように使用している算術（四則演算）の論理は、本当に矛盾がないものなのだろうか。集合論に依拠することで、この問題に結論を与えることができるようになった。自然数にかんする算術公理が無矛盾であることは証明されたが、実数にかんする算術公理が無矛盾であることは現在もなお証明されていない。

なぜこのような「自明の問題」を数学者は問題にするのだろうと疑問に思うかもしれない。確かに、自然数については「自明」のように思われるが、自然数も実数も無限集合だから、有限的視点からいかにして、その命題が真であることを証明ができるのか。これが無限を取り扱う数学問題の根底にある。つまり、「無限の世界を有限的に証明することができるのか」という根本問題が、人間の頭で創った数学に問われている。

無限が生み出すパラドックス

ヒルベルト学派の俊英ノイマンが、ヒルベルト路線と決別し、公理にもとづく数学体系の構築の仕事を放棄した契機は、ゲーデルによる「不完全性定理」（一九三〇年）の証明にある。ノイマン二七歳、ゲーデル二四歳のことである。アリストテレス以来の論理学者とも評されるゲーデルの論理証明を、即座に理解できたのはノイマン一人だった。ヒルベルトは死ぬまで、ゲーデルの定理を受け入れなかった。

「ある公理系における命題が無矛盾であっても、それを公理体系内で証明することはできない」という「不完全性定理」が一般的に成立すれば、ヒルベルトが推進する公理体系の完成化は不可能だということを意味する。ゲーデルがこの不可能性を証明し、ノイマンはそれを即座に理解した。現代数学の基本問題を理解し、二〇世紀の数学世界をリードしたのが、ハンガリーとチェコ出身の二人の天才であり、ウィーン大学を拠点とする数学サークルであった。以後、ゲーデルはノイマンを無二の友人として頼り、ノイマンもまた着任したプリンストン大学にゲーデルを招聘することに尽力を尽くした。

この不完全性定理をどう理解したらよいのだろうか。ある公理系の命題を証明しようと思えば、それを超える公理系が必要になり、さらにその公理系で証明しようとすれば、さらにそれを超える公理系が必要になる。つまり、証明には無限の過程が必要になるということだろうか。これは人間の世界理解が無限の階層性をもっていることを意味しているのではないだろうか。もちろん、それは世界が無限の階層性から創られていることの人間の頭脳への反映であるはずだが。

このように、現代数学の世界は中欧の文化的世界と密接に結びついて発展してきたし、宇宙や素粒子の世界の現代的理解とも密接に結びついている。

繰り返すが、数学の学習をドリル計算に矮小化してはならない。数学は算術ではなく、世界を論理的に認識する手法なのだ。